ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΣΥΓΚΛΗΣΗΣ ΕΠΑΝΑΛ. ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

Γραμ. συγκλιση $\longrightarrow$ $|x_{n+1}-x^*| \leq c \cdot |x_n - x^*|$, $0<c<1$.

NEWTON-RAPHSON **ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

$$f(x)=0 \overset{\lambda\neq 0}{\Rightarrow} \lambda f(x)=0 \Rightarrow \overbrace{\lambda f(x)+x}^{\varphi(x)}=x \Rightarrow \varphi(x)=x$$

Εαν $\varphi'(x^*)=0$ τοτε η ταξη συγκλισης θα ειναι $p>1$.

Πραγματι,

$$\begin{cases} \varphi'(x)=1+\lambda f'(x) \\ \varphi'(x^*)=0 \end{cases} \Rightarrow 1+\lambda f'(x^*)=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{f'(x^*)}$$

με $f'(x^*)\neq 0$

άρα η x^* απλή ρίζα

άρα τώρα πλεον $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

άρα απο Θ. συστολής η αντιστοιχη επαναληπτική μεθοδος που παράγεται είναι

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x^*)}$$

Κατα πόσο ομως συνεχίζει να ισχύει οτι $\varphi'(x^*)=0$;

Εξετάζουμε:

$$\varphi'(x)=1-\frac{(f'(x))^2-f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2}=1-1+\frac{f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2}=$$

$$=\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \Rightarrow \varphi'(x^*)=\frac{f(x^*)\cdot f''(x^*)}{(f'(x^*))^2} \xrightarrow{f(x^*)=0}$$

$$\Rightarrow \varphi'(x^*)=0 \quad , (f'(x^*)\neq 0)$$

Εναλλακτικός τρόπος Newton-Raphson (μέσω Taylor)

Έχουμε ότι $f(x^*)=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x_n) - (x^* - x_n) f'(x_n) + \frac{1}{2}(x^* - x_n)^2 f''(\xi_n) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^* - x_n) f'(x_n) = f(x_n) + \frac{1}{2}(x^* - x_n)^2 f''(\xi_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^* - x_n) = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{1}{2}\frac{(x^* - x_n)^2}{f'(x_n)} f''(\xi_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^* = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}\frac{(x^* - x_n)^2}{f'(x_n)} f''(\xi_n)$$

με $\xi \in (x_n, x^*)$.

Εάν $(x^* - x_n) << 1$ όταν δηλαδή βρισκόμαστε πολύ κοντά στη ρίζα, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε το $-\frac{1}{2}\frac{(x^* - x_n)^2}{f'(x_n)} f''(\xi_n)$ ως αμελητέα ποσότητα

άρα $x^* \simeq x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$